PRIMER PARCIAL **CÁLCULO NUMÉRICO** 10-2-2010

- Duración del examen: 2 horas
- La nota del examen será la media de los problemas planteados. Los problemas puntúan lo mismo.
- Fecha prevista de publicación de notas: 24-2-2010
- Los alumnos que deseen que su examen sea revisado deberán solicitarlo por escrito los días 25/2/2010 y 26/2/2010, de 9:00 a 14:00 horas, en el despacho D-5210.

1^{er} Problema

a) (5 puntos /10 puntos) Se considera el espacio de funciones de clase $C^1([-1,1])$ del tipo

$$u(x)=\begin{cases} \alpha+\beta x, & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2, & x\in[0,1] \end{cases}$$

siendo a, b, c, α, β parámetros reales.
Se considera el problema de encontrar una función del tipo anteriormente señalado tal que interpole los siguiente datos:

$$u(-1)=h_{-1},\quad u(0)=h_0,\quad u'(1)=h_1',$$

con h_{-1}, h_0 y h_1' valores prefijados. Construir dicha función.
b) (5 puntos /10 puntos) Se pretende construir una vía que adopta la forma de una función spline cuadrado s(x) sobre los nodos $\{-1, 0, 1\}$, tal que $s''(-1)=0$. Dar la expresión de la función spline cuadrado del tipo anterior, que interpola los datos:

$$s(-1)=0,\quad s(0)=1,\quad s'(1)=3.$$

2º Problema

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} r_1(x), & x\in[-\pi,0] \\ r_2(x), & x\in[0,\pi], \end{cases}$$

de forma que: La curva que representa $r_1(x)$ es una recta que pasa por los puntos $Q=(x_1,y_1)=(-\pi,0)$ y $P=(x_2,y_2)=(0,1)$ y la que representa a $r_2(x)$ es una recta pasando por los puntos $P=(x_2,y_2)=(0,1)$ y $S=(x_3,y_3)=(\pi,0)$.

a) (2 Puntos /10 puntos) Escribir la expresión de la función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$.
b) (8 Puntos/10 puntos) Encontrar la mejor aproximación mínimos cuadrados **continua** de la función $f(x)$ en el espacio generado por la base $B=\{1, sen(x), \cos(x)\}$. El producto escalar considerado está definido por $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Nota:
$\int sen^2(x)dx=\frac{1}{2}(x-sen(x)\cos(x))$; $\int \cos^2(x)dx=\frac{1}{2}(x+sen(x)\cos(x))$
$\int sen(x)\cos(x)dx=-\frac{1}{2}\cos^2(x)$; $\int x\cos(x)dx=xsen(x)+\cos(x)$; $\int xsen(x)dx=sen(x)-x\cos(x)$

3^{er} Problema

Dada la ecuación:

$$5-x=5e^{-x}$$

Se pide:

a) (5 puntos /10 puntos) Determinar gráfica y analíticamente sus raíces reales y encontrar un intervalo $[a,b]$ aislante para la raíz positiva.
b) (5 puntos /10 puntos) Se quiere utilizar el método iterativo

$$x_{n+1}=5-\frac{5}{e^{x_n}},\quad n=0,1,2,..,$$

para calcular la raíz positiva de la ecuación. Dar un intervalo $[a,b]$ en el que se puede garantizar la convergencia del método para cualquier valor inicial x_0 perteneciente al mismo y justificar la respuesta.

SOLUCIONES

Solución 1^er Problema

a) - Consideramos en primer lugar el espacio interpolante. Imponiendo las condiciones de continuidad de la función u(x) en el punto 0, se obtiene $a=\alpha,\quad b=\beta.$ Por tanto,

$$u(x)=\begin{cases} a+bx, & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

- Considerando una función interpolante del tipo anterior, imponiendo las condiciones de interpolación $(u(-1)=h_{-1},\quad u(0)=h_0,\quad u'(1)=h_1')$, se obtiene:

$$a=h_0,\quad b=h_0-h_{-1},\quad c=\frac{h_1'-h_0+h_{-1}}{2}.$$

b)

- Se consideran funciones spline cuadradas, s(x), con la condición $s''(0)=0$:

Esto es, funciones del tipo:

$$s(x)=\begin{cases} \alpha+\beta x+\gamma x^2, & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de continuidad de las funciones spline cuadradas en 0 (continuidad de la función y de su primera derivada) se obtiene:

$$a=\alpha,\quad b=\beta.$$

Imponiendo la condición adicional $s''(-1)=0$, se obtiene además

$$\gamma=0.$$

Por tanto, las funciones a considerar son del tipo

$$s(x)=\begin{cases} a+bx, & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

Nótese que las funciones obtenidas son del mismo tipo que las construidas en el apartado a).

- La función s(x) del tipo anterior, que interpola los datos dados $(s(-1)=0,\quad s(0)=1,\quad s'(1)=3)$, utilizando la expresión obtenida en el apartado (a) $(h_{-1}=0,\quad h_0=1,\quad h_1'=3)$, admite la expresión:

$$u(x)=\begin{cases} 1+x, & x\in[-1,0] \\ 1+x+x^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

Solución 2º Problema

a) $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}x+1, -\pi\le x<0 \\ -\frac{1}{\pi}x+1, 0\le x\le\pi \end{cases}$$

b) Definidos los elementos de la base y utilizando el teorema de la proyección ortogonal podemos plantear el sistema correspondiente:

$$f1(x)=1, f2(x)=sen(x), f3(x)=\cos(x)$$

$$\begin{pmatrix} <f1,f1> & <f1,f2> & <f1,f3> \\ <f2,f1> & <f2,f2> & <f2,f3> \\ <f3,f1> & <f3,f2> & <f3,f3> \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} <f,f1> \\ <f,f2> \\ <f,f3>\end{bmatrix}$$

Calculamos los productos escalares

$$<f1,f1>=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$$

$$<f1,f2>=<f2,f1>=\int_{-\pi}^{\pi}sen(x)dx=0$$

$$<f1,f3>=<f3,f1>=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx=0$$

$$<f2,f2>=\int_{-\pi}^{\pi}sen^2(x)dx=\pi$$

$$<f2,f3>=<f3,f2>=\int_{-\pi}^{\pi}sen(x)\cos(x)dx=0$$

$$<f3,f3>=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)dx=\pi$$

$$<f,f1>=\pi$$

$$<f,f2>=0$$

$$<f,f3>=\frac{4}{\pi}$$

Quedándonos el siguiente sistema y su resolución:

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \frac{4}{\pi}\end{bmatrix}$$

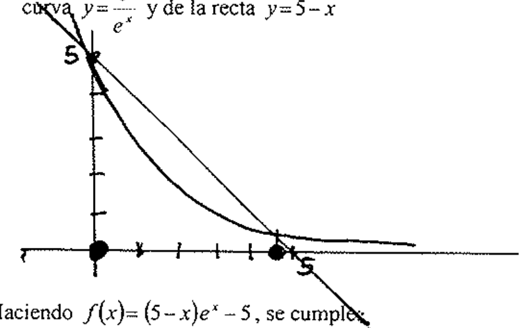
a1=1/2 a2 = 0 a3=$4/\pi^2$

Finalmente la mejor aproximación continua es:

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(x)$$

Solución 3^er^ Problema

a) Las raíces reales de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de corte de la curva $y = \frac{5}{e^x}$ y de la recta $y = 5 - x$



Haciendo $f(x) = (5-x)e^x - 5$, se cumple:

- $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ es raíz de la ecuación dada.
- La otra raíz es positiva:
  $f(5) = -5 < 0$
  $f(1) = 4e - 5 = 5{,}87313 > 0$
  $f'(x) = -e^x + (5-x)e^x = (4-x)e^x$ que se anula para $x = 4 \in [1, 5]$

Aunque gráficamente ya se observa que la raíz positiva es única, podemos reducir el intervalo inicial $[1,5]$ al $[4'5, 5]$ $(f(4'5) > 0 \ y \ f' < 0, \forall x \in [4'5,5])$ en el que los teoremas de Bolzano y de Rolle nos aseguran la existencia y unicidad de la raíz, y por tanto, que es un intervalo aislante de la misma.

b) El método iterativo $x_{n+1} = 5 - \frac{5}{e^{x_n}}$ $con\ n = 0,1,..$ implica una ecuación de punto fijo $x = g(x) = 5 - \frac{5}{e^x}$, que es equivalente a la ecuación dada, y si es convergente en el intervalo $[4'5, 5]$ se puede utilizar para calcular la raíz de la ecuación en dicho intervalo, tomando como valor inicial cualquier x_0 perteneciente al mismo (Teorema de convergencia global).

Estudiamos si la función $g(x)$ cumple las condiciones del Teorema:
Sean

$$g(x) = 5 - \frac{5}{e^x}$$
$$g'(x) = \frac{5}{e^x}$$

La función $g(x) \in C^1[4'5, 5]$ y además:

- La función $g(x)$ es contractiva en $[4'5, 5]$:

  $$|g'(x)| = \left|\frac{5}{e^x}\right| = \frac{5}{e^x}$$

  La función $g'(x) = |g'(x)|$ es siempre positiva y decreciente en el intervalo $[4'5, 5]$ por tanto, su valor máximo lo alcanza en el extremo inferior del intervalo considerado

  $$\max_{x \in [4'5,5]} |g'(x)| = \max_{x \in [4'5,5]} g(x) = \frac{5}{e^{4'5}} = 0{,}056 = L < 1$$

  Siendo L su constante de contractividad
  Si no hubiésemos pasado del intervalo $[1,5]$ al $[4'5, 5]$, deberíamos haber reducido el intervalo aquí para poder utilizar el método dado.

- ¿Se cumple que $g([4'5,5]) \subset [4'5, 5]$?

  $g(x) = 5 - \frac{5}{e^x} > 0$ en $[4'5, 5]$

  $g'(x) = \frac{5}{e^x} > 0$ en $[4'5, 5]$

  Por tanto, $g(x)$ es positiva y creciente en $[4'5, 5]$, alcanza sus valores mínimo y máximo en $x = 4'5$ y $x = 5$, respectivamente.
  $g(4'5) = 4{,}94455$
  $g(5) = 4{,}96631$

  Así $g([4'5,5]) = [4'94455, 4'96631] \subset [4'5, 5]$ y la respuesta a la pregunta es afirmativa

  Al cumplirse las condiciones del Teorema de convergencia global por la función $g(x)$, para cualquier $x_0 \in [4'5, 5]$, el método iterativo dado converge a la solución positiva de la ecuación $(5-x)e^x = 5$.